

第 3 回 小テスト (微分 II)

学生番号 _____

氏名 _____

1. 次の媒介変数表示から $\frac{dy}{dx}$ を求めなさい.

$$(1) \begin{cases} x = 3t - 1 \\ y = t^2 - 2 \end{cases}$$

答. $\frac{dx}{dt} = 3, \frac{dy}{dt} = 2t = \frac{2}{3}(x+1)$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{2(x+1)}{3 \cdot 3} = \frac{2(x+1)}{9}$$

である.

$$(2) \begin{cases} x = \sqrt{t} \\ y = t^2 - 1 \end{cases}$$

答. $\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2\sqrt{t}} = \frac{1}{2x}, \frac{dy}{dt} = 2t = 2x^2$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = 2x^2 \cdot 2x = 4x^3$$

である.

2. 次の媒介変数表示から $\frac{dy}{dx}$ を t を用いて表しなさい.

$$(1) \text{ 楕円 } \begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 2 \sin t \end{cases}$$

答. $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t, \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{2 \cos t}{-3 \sin t} = -\frac{2}{3 \tan t}$$

である.

$$(2) \text{ アステロイド } \begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \end{cases}$$

答. $\frac{dx}{dt} = -3 \sin t \cos^2 t, \frac{dy}{dt} = 3 \cos t \sin^2 t$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{3 \cos t \sin^2 t}{-3 \sin t \cos^2 t} = -\frac{\sin t}{\cos t} = -\tan t$$

である.

$$(3) \text{ インボリュート } \begin{cases} x = \cos t + t \sin t \\ y = \sin t - t \cos t \end{cases}$$

答. $\frac{dx}{dt} = -\sin t + \sin t + t \cos t = t \cos t, \frac{dy}{dt} = \cos t - \cos t + t \sin t = t \sin t$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{t \sin t}{t \cos t} = \tan t$$

である.

3. 円の媒介変数表示 $\begin{cases} x = 2 \cos t, \\ y = 2 \sin t \end{cases}$ から, $t = \frac{\pi}{6}$ に対する点 $P(\sqrt{3}, 1)$ における接線の方程式を求めなさい.

答. $\frac{dx}{dt} = -2 \sin t, \frac{dy}{dt} = 2 \cos t$ であるから,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\left(\frac{dy}{dt}\right)}{\left(\frac{dx}{dt}\right)} = \frac{2 \cos t}{-2 \sin t} = -\frac{1}{\tan t}$$

である. よって点 P における接線の傾きは,

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{t=\frac{\pi}{6}} = -\frac{1}{\tan \frac{\pi}{6}} = -\sqrt{3}$$

であり, 従って点 P における接線の方程式は

$$y = -\sqrt{3}(x - \sqrt{3}) + 1 = -\sqrt{3}x + 4$$

である.