解答

中間試験のおよその点数配分

検算と初期値問題で約 1/3,
変数分離形で約 1/3,
1 階線形微分方程式で約 1/3

微分方程式の解

一般解 = 全ての解を表した解
特殊解 = 解の一つ

微分方程式の解の検算

検算 = 方程式に解を代入

検算の計算では微分の知識が必要!

問題 1. 検算を用いて以下の問いに答えよ.

(1) $\begin{cases} y = xe^{\frac{1}{2}x} \\ y = xe^{2x} \quad \Leftarrow \text{解} \end{cases}$

のうち, $y' - 2y = e^{2x}$ の解はどちらか?

(2) $\begin{cases} y = \sqrt{x^2 - 1} \\ y = \sqrt{1 - x^2} \quad \Leftarrow \text{解} \end{cases}$

のうち, $yy' + x = 0$ の解はどちらか?

(3) $\begin{cases} y = 2\log(1 + x^2) + C \\ y = \dfrac{1}{2}\log(1 + x^2) + C \quad \Leftarrow \text{解} \end{cases}$

のうち, $x - (1 + x^2)\dfrac{dy}{dx} = 0$ の一般解はどちらか?

(4) $\begin{cases} y = \arctan(x + C) - x + 1 \\ y = \tan(x + C) - x + 1 \quad \Leftarrow \text{解} \end{cases}$

のうち, $y' = (x + y - 1)^2$ の一般解はどちらか?

初期値問題

初期値問題 = 微分方程式 + 初期条件

初期値問題は微分方程式の一般解から導くことができる

問題 2. 初期値問題に関して以下の問いに答えなさい.

(1) 微分方程式 $\dfrac{dy}{dx} = x - y$ の一般解は

$$y = x - Ce^{-x} - 1$$

である. 初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = x - y \\ y(1) = 0 \end{cases}$$

の解は何か?

答. $y = x - 1$

(2) 微分方程式 $y' = \dfrac{2x^2 - y^2}{xy}$ の一般解は

$$y = \pm\sqrt{x^2 + \frac{C}{x^2}}$$

である. 初期値問題

$$\begin{cases} y' = \dfrac{2x^2 - y^2}{xy} \\ y(1) = -2 \end{cases}$$

の解は何か?

答. $y = -\sqrt{x^2 + \dfrac{3}{x^2}}$

変数分離形

微分方程式が

$$g(y)dy = f(x)dx$$

と変形できたなら, 後は積分で解こう.

問題 3. 変数分離形の微分方程式を解くときを考える. 下線部に入る式を書きなさい.

(1)

$$\frac{dy}{dx} = xy$$

の一般解を求める.
変数を分離して ($y \neq 0$ と仮定)

$$\underline{\frac{1}{y}}\, dy = \underline{\ x\ }\, dx$$

両辺を積分して

$$\underline{\log|y|} = \underline{\frac{1}{2}x^2} + C_1 \quad (C_1 \text{ は任意定数})$$

y について解いて

$$y = C_2 \times \underline{e^{\frac{1}{2}x^2}} \quad (C_2 \neq 0 \text{ は任意定数})$$

$y = 0$ も解だから, 一般解は

$$y = C \times \underline{e^{\frac{1}{2}x^2}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(2)

$$\frac{dy}{dx} = e^x(1 + y^2)$$

の一般解を求める.
変数を分離して

$$\underline{\frac{1}{1+y^2}}\, dy = \underline{\ e^x\ }\, dx$$

両辺を積分して

$$\underline{\arctan y} = \underline{\ e^x\ } + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

y について解いて

$$y = \underline{\tan(e^x + C)} \quad (C \text{ は任意定数})$$

(3)

$$\frac{1}{\cos x}y' = y^2$$

の一般解を求める.
変数を分離して

$$\underline{\frac{1}{y^2}}\, dy = \underline{\cos x}\, dx$$

両辺を積分して

$$\underline{-\frac{1}{y}} = \underline{\sin x} + C \quad (C \text{ は任意定数})$$

y について解いて

$$y = \underline{-\frac{1}{\sin x + C}} \quad (C \text{ は任意定数})$$

1 階線形微分方程式

$$\text{非同次型 } y' + f(x)y = g(x)$$

$$\text{同次型 } y' + f(x)y = 0$$

について非同次型の一般解 y は, 非同次型の特殊解 y_p と同次型の一般解 y_h を用いて,

$$y = y_p + y_h$$

問題 4. $y' - y = x$ の一般解を求めるときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 同次型

$$y' - y = 0$$

の一般解 y_h を求めなさい.

答. $y_h = Ce^x$ (C は任意定数)

(2) $y_p = ax + b$ (a, b は定数) が非同次型

$$y' - y = x$$

の特殊解となるように a, b を求めなさい.

答. $a = -1$, $b = -1$

(3) (1) と (2) の結果を使って非同次型

$$y' - y = x$$

の一般解 y を求めなさい.

答. $y = y_p + y_h = -x - 1 + Ce^x$ (C は任意定数)

定数変化法

$$\text{非同次型 } y' + f(x)y = g(x)$$

$$\text{同次型 } y' + f(x)y = 0$$

について, 同次型の一般解 y_h を

$$y_h = CH(x)$$

とするとき,

$$y_p = C(x)H(x)$$

と置いて非同次型の特殊解 y_p を求めることができる.

問題 5. $y' + xy = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}$ の一般解を求めるときを考える. 以下の問いに答えなさい.

(1) 同次型

$$y' + xy = 0$$

の一般解 y_h を求めなさい.

答. $y_h = Ce^{-\frac{1}{2}x^2}$ (C は任意定数)

(2) (1) の結果を用いて定数変化法で

$$y' + xy = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

の特殊解 y_p を求めなさい.

答. $y_p = C(x)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ と置いて, 方程式に代入して $C(x)$ を求めると $C(x) = 3x$. 故に $y_p = 3xe^{-\frac{1}{2}x^2}$

(3) (1) と (2) の結果を使って非同次型

$$y' + xy = 3e^{-\frac{1}{2}x^2}$$

の一般解 y を求めなさい.

答. $y = y_p + y_h = (3x + C)e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (C は任意定数)

問題 6. 以下の微分方程式の一般解を求めなさい.

(1) $$y' = 3y$$

答. $y = Ce^{3x}$ (C は任意定数)

(2) $$y' = -e^{x+y}$$

答. $y = -\log(e^x + C)$ (C は任意定数)

問題 7. 非同次型の 1 階線形微分方程式

$$y' + 2y = e^{2x}$$

の一般解を求めなさい.

答. 同次型の一般解が

$$y_h = Ce^{-2x} \quad (C \text{ は任意定数})$$

定数変化法から $y_p = C(x)e^{-2x}$ と置いて, 非同次型の方程式に代入し, $C(x)$ を求めると

$$C(x) = \frac{1}{4}e^{4x}$$

故に, 非同次型の一般解は

$$y = y_p + y_h = \left(\frac{1}{4}e^{4x} + C\right)e^{-2x}$$