解答 (期末試験勉強用プリント, 工科系数学 I)

1 (三角関数の微分).

a. $(\sin(7x+8))' = 7\cos(7x+8)$

b. $(\cos(2-5x))' = 5\sin(2-5x)$

c. $(\log x \tan 2x)' \underset{\text{積の微分}}{=} (\log x)' \tan 2x + \log x(\tan 2x)'$
$= \dfrac{\tan 2x}{x} + \dfrac{2\log x}{\cos^2 2x}$

d. $(\sin 3x \cos 5x)'$
$\underset{\text{積の微分}}{=} (\sin 3x)' \cos 5x + \sin 3x(\cos 5x)'$
$= 3\cos 3x \cos 5x - 5\sin 3x \sin 5x$

e. $(\sin^3 x)' = 3\sin^2 x \cos x$

f. $(\tan(x^2+5x))' = \dfrac{2x+5}{\cos^2(x^2+5x)}$

g. $(e^{\cos x})' = -\sin x e^{\cos x}$

h. $(\sin(\cos 2x))' = -2\sin 2x \cos(\cos 2x)$

三角関数の微分

$(\sin x)' = \cos x$

$(\cos x)' = -\sin x$

$(\tan x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$

微分公式

積の微分
$(f(x)g(x))' = f'(x)\cdot g(x) + f(x)\cdot g'(x)$

合成の微分
$(f(g(x)))' = f'(g(x))\cdot g'(x)$

2 (逆三角関数).

a. $\arcsin 0 = 0$

b. $\arcsin \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{6}$

c. $\arcsin -\dfrac{1}{\sqrt{2}} = -\dfrac{\pi}{4}$

d. $\arccos 1 = 0$

e. $\arccos \dfrac{1}{2} = \dfrac{\pi}{3}$

f. $\arccos \dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\pi}{4}$

g. $\arctan 1 = \dfrac{\pi}{4}$

h. $\arctan \dfrac{1}{\sqrt{3}} = \dfrac{\pi}{6}$

i. $\arctan -1 = -\dfrac{\pi}{4}$

j. $(\arcsin x)' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

k. $(\arctan x)' = \dfrac{1}{1+x^2}$

逆三角関数

$\arcsin x =$
「$\sin y = x$ となる $-\dfrac{\pi}{2} \leq y \leq \dfrac{\pi}{2}$」

$\arccos x =$
「$\cos y = x$ となる $0 \leq y \leq \pi$」

$\arctan x =$
「$\tan y = x$ となる $-\dfrac{\pi}{2} < y < \dfrac{\pi}{2}$」

3 (増減表). 以下の関数の増減表を書きなさい.

a. $f(x) = x^2 + 4x - 5$
答. $f'(x) = 2x + 4 = 2(x+2)$

$$\therefore f'(x) = 0 \iff x = -2$$

$$x < -2 \text{ のとき}, f'(x) < 0$$

$$x > -2 \text{ のとき}, f'(x) > 0$$

また, $f(-2) = (-2)^2 + 4 \cdot (-2) - 5 = -9$ より増減表は

x	$\cdots$	-2	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	-9	$\nearrow$

b. $f(x) = 2x^3 - 3x^2 + 1$
答. $f'(x) = 6x^2 - 6x = 6x(x-1)$

$$\therefore f'(x) = 0 \iff x = 0, 1$$

$$x < 0, 1 < x \text{ のとき}, f'(x) > 0$$

$$0 < x < 1 \text{ のとき}, f'(x) < 0$$

また, $f(0) = 2 \cdot 0^3 - 3 \cdot 0^2 + 1 = 1$
$f(1) = 2 \cdot 1^3 - 3 \cdot 1^2 + 1 = 0$ より増減表は

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

関数の増減

$f'(x) > 0 \implies f(x)$ は増加
$f'(x) < 0 \implies f(x)$ は減少
$f'(x) = 0 \implies f(x)$ は一定

4 (極値). 以下の関数の極値を求めよ.

a. $f(x) = x^2 - 2x + 3$
答. $f'(x) = 2x - 2 = 2(x-1)$

$$\therefore f'(x) = 0 \iff x = 1$$

増減表を作成すると

x	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$	2	$\nearrow$

従って, 極値は,

$$x = 1 \text{ のときに極小値 } f(1) = 2$$

b. $f(x) = x^3 - 4x^2 - 3x$
答. $f'(x) = 3x^2 - 8x - 3 = (3x+1)(x-3)$

$$\therefore f'(x) = 0 \iff x = -\frac{1}{3}, 3$$

増減表を作成すると,

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\frac{14}{27}$	$\searrow$	-18	$\nearrow$

従って, 極値は,

$$x = -\frac{1}{3} \text{ のときに極大値 } f\left(-\frac{1}{3}\right) = \frac{14}{27}$$

$$x = 3 \text{ のときに極小値 } f(3) = -18$$

極値

極値とは関数の増減の境目となる値
$\begin{cases} \text{極大 (値) は増加から減少となる境目} \\ \text{極小 (値) は減少から増加となる境目} \end{cases}$

5 (極限).

a. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{x-1} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 1} 2x+1 = 3$

b. $\displaystyle \lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2+4x+3} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to -1}\frac{1}{2x+4} = \frac{1}{2}$

c. $\displaystyle \lim_{x\to 2}\frac{x^3+2x^2-5x-6}{x^3-x^2-4x+4} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 2}\frac{3x^2+4x-5}{3x^2-2x-4} = \frac{15}{4}$

d. $\displaystyle \lim_{x\to\infty}\frac{4x^2+3x-2}{x^2+5} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to\infty}\frac{8x+3}{2x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to\infty} 4 = 4$

e. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\cos x = \cos 0 = 1$

f. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\sin 2x}{3x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{2}{3}\cos 2x = \frac{2}{3}\cos 0 = \frac{2}{3}$

g. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\tan 4x}{3x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{4}{3\cos^2 4x} = \frac{4}{3\cos^2 0} = \frac{4}{3}$

h. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1$

i. $\displaystyle \lim_{x\to 1}\frac{\log x}{x-1} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{1}{x} = 1$

j. $\displaystyle \lim_{x\to 0}\frac{e^x-x-1}{x^2} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{2x} \underset{\text{ロピタルの定理}}{=} \lim_{x\to 0}\frac{1}{2}e^x = \frac{1}{2}e^0 = \frac{1}{2}$

ロピタルの定理

$\dfrac{f(a)}{g(a)}$ が不定形のとき

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

6 (変形して極限を求める問題). 公式

$$x = e^{\log x}$$

を用いて, 以下の極限を求めなさい.

a. $\displaystyle \lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} =$

答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} \\
&\underset{\text{変形}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\log(1+x)^{\frac{1}{x}}} \\
&\underset{\text{対数法則}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{\log(1+x)}{x}} \\
&\underset{\text{ロピタルの定理}}{=} e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{1+x}} \\
&\underset{\text{極限計算}}{=} e^1 \\
&= e
\end{aligned}$$

b. $\displaystyle \lim_{x\to 1}(1+\log x)^{\frac{1}{\log x}} =$

答.

$$\begin{aligned}
&\lim_{x\to 1}(1+\log x)^{\frac{1}{\log x}} \\
&\underset{\text{変形}}{=} e^{\lim_{x\to 1}\log(1+\log x)^{\frac{1}{\log x}}} \\
&\underset{\text{対数法則}}{=} e^{\lim_{x\to 1}\frac{\log(1+\log x)}{\log x}} \\
&\underset{\text{ロピタルの定理}}{=} e^{\lim_{x\to 1}\frac{1}{1+\log x}} \\
&\underset{\text{極限計算}}{=} e^{\frac{1}{1+\log 1}} \\
&= e^1 \\
&= e
\end{aligned}$$