

解答

微分とは

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

冪関数の微分公式

$$(x^a)' = ax^{a-1}$$

問題 1. 以下の微分を計算しなさい.

$$(1) (9x + 5)' = 9$$

$$(2) (2x^2 + x)' = 4x + 1$$

$$(3) (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$(4) (x^{\frac{1}{3}})' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$$

$$(5) \left(\frac{1}{x}\right)' = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2}$$

$$(6) \left(\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}\right)' = \frac{3}{4}x^{-\frac{7}{4}} = \frac{3}{4x\sqrt[4]{x^3}}$$

指数・対数関数の微分公式

$$\begin{aligned} (e^x)' &= e^x & (a^x)' &= (\log a)a^x \\ (\log x)' &= \frac{1}{x} & (\log_a x)' &= \frac{1}{(\log a)x} \end{aligned}$$

問題 2. 以下の微分を計算しなさい.

$$(1) (3e^x)' = 3e^x$$

$$(2) (\log 2x)' = \frac{1}{x}$$

$$(3) (2^x)' = (\log 2)2^x$$

合成関数の微分公式

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

問題 3. 以下の微分を計算しなさい.

$$(1) ((2x + 1)^{-3})' \\ = -6(2x + 1)^{-4} = -\frac{6}{(2x + 1)^4}$$

$$(2) (\sqrt[3]{6x + 7})' \\ = 2(6x + 7)^{-\frac{2}{3}} = \frac{2}{\sqrt[3]{(6x + 7)^2}}$$

$$(3) (\log(2x - 5))' = \frac{2}{2x - 5}$$

$$(4) (\log(\log x))' = \frac{1}{x \log x}$$

$$(5) (e^{3x})' = 3e^{3x}$$

$$(6) (e^{x^2+x})' = (2x + 1)e^{x^2+x}$$

積・商の微分公式

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}$$

問題 4. 以下の微分を計算しなさい.

$$(1) ((x^2 - 2x)e^{-x})' = (-x^2 + 4x - 2)e^{-x}$$

$$(2) (x \log x)' = \log x + 1$$

$$(3) \left(\frac{2 - 3x}{3x + 5}\right)' = -\frac{21}{(3x + 5)^2}$$

対数微分法

$$(\log f(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)}$$

や対数法則を用いて微分を計算する方法を対数微分法という。

問題 5. $(x^x)'$ を対数微分法で計算するときを考える。以下の下線部に当てはまる式を書きなさい。

(1) 対数法則から等式

$$\log x^x = \underline{\quad x \log x \quad}$$

が成り立つ。

(2) 両辺を微分して

$$\frac{(x^x)'}{x^x} = \underline{\quad \log x + 1 \quad}$$

(3) 変形すると

$$(x^x)' = \underline{\quad x^x(\log x + 1) \quad}$$

が求まる。

高次導関数

$$f^{(n)}(x) = \text{「} f(x) \text{ を } n \text{ 回微分したもの」}$$

問題 6. 以下の微分を計算しなさい。

(1) $(x^3 - 4x)'' = 6x$

(2) $(e^{2x})'' = 4e^{2x}$

接線・法線の方程式

関数 $f(x)$ のグラフ上の点 $P(a, f(a))$ において

接線の方程式 $y = f'(a)(x - a) + f(a)$

法線の方程式 $y = -\frac{1}{f'(a)}(x - a) + f(a)$

問題 7. 以下の関数のグラフ上の点 P での接線の方程式を求めなさい。

(1) $f(x) = x^2 - 4x$ $P(3, -3)$

答. $f'(x) = 2x - 4$ なので,

$$\begin{aligned} \text{接線の方程式 } y &= 2(x - 3) - 3 \\ &= 2x - 9 \end{aligned}$$

(2) $f(x) = 2 \log x$ $P(e, 2)$

答. $f'(x) = \frac{2}{x}$ なので,

$$\begin{aligned} \text{接線の方程式 } y &= \frac{2}{e}(x - e) + 2 \\ &= \frac{2}{e}x \end{aligned}$$

問題 8. 以下の関数のグラフ上の点 P での法線の方程式を求めなさい。

(1) $f(x) = x^3 - 2x$ $P(1, -1)$

答. $f'(x) = 3x^2 - 2$ なので,

$$\begin{aligned} \text{法線の方程式 } y &= -(x - 1) - 1 \\ &= -x \end{aligned}$$

(2) $f(x) = e^{2x}$ $P(0, 1)$

答. $f'(x) = 2e^{2x}$ なので,

$$\text{法線の方程式 } y = -\frac{1}{2}x + 1$$